PART2　いろいろな不定方程式

2　[1]　$4x+2y+z=15$ を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

[2]　(1)　$xy-3x-7y+15=0$ を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

(2)　$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-4$ を因数分解せよ。また，その結果を用いて，$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-20=0$ を満たす自然数 x, y の組をすべて求めよ。

Point Pickup

[1]　ある文字について式を整理し，他の文字の取り得る値の範囲が 1 以上であることに注目して，ある文字に関する不等式を立て，値を絞り込む。

[2]　因数分解を用いて，

(　　　)×(　　　)＝(整数)

の形に変形し，正負，偶奇，大小に注目して値を絞り込む。

第9講　PART2　確認問題

1 $6x+5y+3z=28$ を満たす自然数 x, y, z の組をすべて求めよ。

$(x,\ y,\ z)=($ ア , イ , ウ $)$,

$($ エ , オ , カ $)$

ただし，ア $<$ エ とする。

2 $xy-5x-2y+6=0$ を満たす自然数 x, y の組をすべて求めよ。

$(x,\ y)=($ キ , ク $)$, $($ ケ , コ $)$,

$($ サ , シ $)$, $($ ス , セ $)$

ただし，キ $<$ ケ $<$ サ $<$ ス とする。

3 次の問いに答えよ。

(1) $x^2+xy-6y^2+x+8y-2$ を因数分解せよ。

$x^2+xy-6y^2+x+8y-2$

$=(x+$ ソ $y-$ タ $)(x-$ チ $y+$ ツ $)$

(2) (1)の結果を用いて，

$$x^2+xy-6y^2+x+8y-20=0$$

を満たす自然数 x, y の組をすべて求めよ。

$(x,\ y)=($ テ , ト $)$, $($ ナ , ニ $)$

ただし，テ $<$ ナ とする。

PART2　いろいろな不定方程式

2　［1］　$4x+2y+z=15$ を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

［2］ (1)　$xy-3x-7y+15=0$ を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

(2)　$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-4$ を因数分解せよ。また，その結果を用いて，$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-20=0$ を満たす自然数 x, y の組をすべて求めよ。

［1］　$4x+2y+z=15$ より $4x=15-2y-z$

$y\geqq 1$，$z\geqq 1$ より，$-2y\leqq -2$，$-z\leqq -1$ であるから

$$4x=15-2y-z\leqq 15-2-1=12$$

よって，$4x\leqq 12$ より $x\leqq 3$

x は自然数であるから　$x=1,\ 2,\ 3$

$x=1$ のとき　$4+2y+z=15$　より　$2y+z=11$

$z\geqq 1$ より $2y=11-z\leqq 11-1=10$　　よって　$y\leqq 5$

したがって　$(y,\ z)=(1,\ 9),\ (2,\ 7),\ (3,\ 5),\ (4,\ 3),\ (5,\ 1)$

$x=2$ のとき　$8+2y+z=15$　より　$2y+z=7$

$z\geqq 1$ より $2y=7-z\leqq 7-1=6$　　よって　$y\leqq 3$

したがって　$(y,\ z)=(1,\ 5),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1)$

$x=3$ のとき　$12+2y+z=15$　より　$2y+z=3$

$z\geqq 1$ より $2y=3-z\leqq 3-1=2$　　よって　$y\leqq 1$

したがって　$(y,\ z)=(1,\ 1)$

以上より　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 9),\ (1,\ 2,\ 7),\ (1,\ 3,\ 5),\ (1,\ 4,\ 3),\ (1,\ 5,\ 1),$
$(2,\ 1,\ 5),\ (2,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 1)$

［2］ (1)　$xy-3x-7y+15=0$　より　$(x-7)(y-3)-21+15=0$

よって　$(x-7)(y-3)=6$

x，y は自然数であるから，$x-7$，$y-3$ は整数

また，$x-7\geqq 1-7\geqq -6$，$y-3\geqq 1-3\geqq -2$

したがって　$(x-7,\ y-3)=(-6,\ -1),\ (-3,\ -2),\ (1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (4,\ 1),\ (8,\ 9),\ (9,\ 6),\ (10,\ 5),\ (13,\ 4)$

(2)　$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-4$

$=6x^2+(y-5)x-2(y^2-3y+2)$

$=6x^2+(y-5)x-2(y-1)(y-2)$

$=(3x+2y-4)(2x-y+1)$

$$\begin{array}{llcr} 3 & 2(y-2) & \longrightarrow & 4y-8 \\ 2 & -(y-1) & \longrightarrow & -3y+3 \\ \hline & & & y-5 \end{array}$$

$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-20=0$

$(6x^2+xy-2y^2-5x+6y-4)-16=0$

$(3x+2y-4)(2x-y+1)=16$

x，y は自然数より，$3x+2y-4$，$2x-y+1$ は整数である。

また，$3x+2y-4 \geqq 3\cdot1+2\cdot1-4=1>0$ より $2x-y+1>0$

したがって　$(3x+2y-4,\ 2x-y+1)=(1,\ 16),\ (2,\ 8),\ (4,\ 4),\ (8,\ 2),\ (16,\ 1)$

ここで，$3x+2y-4=m$，$2x-y+1=n$（m，n は整数）とすると

$$x=\frac{1}{7}(m+2n+2),\quad y=2x+1-n$$

x が自然数となるのは，$(m,\ n)=(1,\ 16),\ (4,\ 4),\ (8,\ 2)$ のときで

$(m,\ n)=(1,\ 16)$ のとき　$x=5$，$y=-5$

$(m,\ n)=(4,\ 4)$ のとき　$x=2$，$y=1$

$(m,\ n)=(8,\ 2)$ のとき　$x=2$，$y=3$

したがって，求める自然数 x，y の組は　$(x,\ y)=(2,\ 1),\ (2,\ 3)$

第 9 講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：2，ウ：4，エ：2，オ：2，カ：2

[解説]

$6x+5y+3z=28$ より

$$6x=28-5y-3z \quad \text{[A]}$$

[A]　いずれの文字も自然数であるから，とりうる値の範囲が 1 以上であることに注目する。これを利用し，ある文字に関する不等式を立て，値を絞り込む。

$y \geqq 1$，$z \geqq 1$ より，$-5y \leqq -5$，$-3z \leqq -3$ であるから

$$6x=28-5y-3z \leqq 28-5-3=20$$

すなわち，$6x \leqq 20$ より　$x \leqq \dfrac{10}{3}$

x は自然数より　$x=1,\ 2,\ 3$

(i)　$x=1$ のとき

$6+5y+3z=28$ より　$5y+3z=22$

$-3z \leqq -3$ より　$5y=22-3z \leqq 22-3=19$

よって　$y=1,\ 2,\ 3$

このとき　$22-5y=17,\ 12,\ 7$

$3z=22-5y$ より，$22-5y$ は 3 の倍数であるから　$22-5y=12$

ゆえに　$y=2$，$z=4$

(ii)　$x=2$ のとき

$12+5y+3z=28$ より　$5y+3z=16$

$-3z \leqq -3$ より　$5y=16-3z \leqq 16-3=13$

よって　$y=1,\ 2$

このとき　$16-5y=11,\ 6$

$3z=16-5y$ より，$16-5y$ は 3 の倍数であるから　$16-5y=6$

ゆえに　$y=2$，$z=2$

(iii)　$x=3$ のとき

$18+5y+3z=28$ より　$5y+3z=10$

$-3z \leqq -3$ より　$5y = 10-3z \leqq 10-3 = 7$

よって　$y = 1$

このとき　$10-5y = 5$

$3z = 10-5y$ より，$10-5y$ は 3 の倍数である

から，これを満たす y，z は存在しない。

(i)，(ii)，(iii)より，求める自然数 x，y，z の組は

$(x,\ y,\ z) = \mathbf{(1,\ 2,\ 4),\ (2,\ 2,\ 2)}$

2

[正解] **キ**：1，**ク**：1，**ケ**：3，**コ**：9，**サ**：4，**シ**：7，**ス**：6，**セ**：6

[解説]

$xy-5x-2y+6 = 0$ より

$x(y-5)-2(y-5)-10+6 = 0$

よって　$(x-2)(y-5) = 4$ [B]

x, y は自然数であるから, $x-2$, $y-5$ は整数である。

また

$x-2 \geqq 1-2 = -1$，$y-5 \geqq 1-5 = -4$

したがって

$(x-2,\ y-5) = (-1,\ -4),\ (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$

よって

$(x,\ y) = \mathbf{(1,\ 1),\ (3,\ 9),\ (4,\ 7),\ (6,\ 6)}$

[B]　因数分解を用いて，
（整数）×（整数）＝（整数）
の形に変形し，正負，偶奇，大小に注目して値を絞り込む。

3 **[正解]** ソ：3，タ：1，チ：2，ツ：2，テ：4，
ト：2，ナ：7，ニ：4

[解説]

(1) $x^2+xy-6y^2+x+8y-2$

$=x^2+(y+1)x-6y^2+8y-2$

$=x^2+(y+1)x+(3y-1)(-2y+2)$

$=\boldsymbol{(x+3y-1)(x-2y+2)}$ [B]

$$\begin{array}{llcr} 1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 3y-1 \longrightarrow & 3y-1 \\ 1 & & -2y+2 \longrightarrow & -2y+2 \\ \hline 1 & (3y-1)(-2y+2) & & y+1 \end{array}$$

(2) $x^2+xy-6y^2+x+8y-20=0$ より

$$x^2+xy-6y^2+x+8y-2=18$$

(1)より　$(x+3y-1)(x-2y+2)=18$

x，y は自然数であるから，$x+3y-1$，$x-2y+2$ は整数である。

また　$x+3y-1 \geqq 1+3\cdot 1-1=3$

よって

$$(x+3y-1,\ x-2y+2)$$
$$=(3,\ 6),\ (6,\ 3),\ (9,\ 2),\ (18,\ 1)$$

ここで，$x+3y-1=m$，$x-2y+2=n$ [C]

(m，n は整数)

とすると

$$x=\frac{1}{5}(2m+3n-4),\ y=\frac{1}{5}(m-n+3)$$

x が自然数になるのは

$$(m,\ n)=(3,\ 6),\ (9,\ 2),\ (18,\ 1)$$

$(m,\ n)=(3,\ 6)$ のとき　$x=4$，$y=0$

$(m,\ n)=(9,\ 2)$ のとき　$x=4$，$y=2$

$(m,\ n)=(18,\ 1)$ のとき　$x=7$，$y=4$

よって，求める自然数 x，y の組は

$$(x,\ y)=\boldsymbol{(4,\ 2),\ (7,\ 4)}$$

[C]　x，y の連立方程式の解を m，n を用いて表しておく。あとは，m，n に値を代入して，x，y が自然数になる場合を調べる。